УДК 519.714.2

НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СЛУЧАЕ РЕЗЕРВИРОВАНИЯ КАНАЛОВ НАБЛЮДЕНИЙ С ПАМЯТЬЮ ПРИ НАЛИЧИИ АНОМАЛЬНЫХ ПОМЕХ

Н.С. Демин*, С.В. Рожкова**, О.В. Рожкова**

*Томский государственный университет, **Томский политехнический университет
E-mail: svrhm@mail2000.ru

Результаты работ [1, 2] обобщаются на случай резервирования дискретных каналов наблюдения с памятью. Исследуется зависимость точности оценивания от кратности резервирования каналов наблюдения.

1. Введение

В [1] на основе анализа научных публикаций была решена задача синтеза оптимального в среднеквадратическом смысле несмещенного фильтра-интерполятора-экстраполятора (далее ФИЭ) в случае непрерывно-дискретных наблюдений с памятью при наличии аномальных помех, а в [2] доказана оптимальность процедуры исключения аномальных компонент вектора наблюдения и исследована зависимость качества оценивания от размерности и структуры аномальных каналов наблюдения. На практике одним из средств повышения надежности измерительных систем и точности систем обработки информации является резервирование каналов наблюдения [3]. В данной статье исследуется вопрос зависимости точности оценивания от кратности резервирования каналов наблюдения. Модели процессов x_t, z_t, и система предположений и обозначений те же, что и в [1].

2. Резервирование каналов наблюдения

Пусть индекс $[i]$ – кратность резервирования в дискретном канале наблюдения. Тогда $q{\cdot}i$-мерный вектор дискретных наблюдений в соответствии с (1.3) из [1] принимает вид

$$\eta_{[i]}(t_m) = G_0^{[i]}(t_m)x_{t_m} + \sum_{k=1}^{N} G_k^{[i]}(t_m)x_{\tau_k} + \Phi_3(t_m)\xi_{[i]}(t_m) + C_{[i]}f(t_m), \qquad (1)$$

где: $G_0^{[i]}(t_m)$ и $G_k^{[i]}(t_m)$, являются блочно-столбцовыми матрицами размеров $(q{\cdot}i{\times}n)$, состоящими соответственно из i матриц $G_0(t_m)$ и $G_k(t_m)$ размеров $(q{\times}n)$; $\xi_{[i]}(t_m)$ – $q{\cdot}i$-мерный вектор регулярных помех с матрицей интенсивности $V_{[i]}(t_m)$ размера $(q{\cdot}i{\times}q{\cdot}i)$, которая является блочно-диагональной и состоит из матриц $V_j(t_m)$ размера $(q{\times}q)$, $j=\overline{1;i}$; матрица $C_{[i]}$ размера $(q{\cdot}i{\times}r)$ является блочно-столбцовой, состоящей из i булевых матриц C размера $(q{\times}r)$ той же структуры, что и в [1]; $f(t_m)$ – r-мерный вектор аномальных помех, $r \leqslant q{\cdot}i$, того же типа, что и в [1].

Следующие два Утверждения очевидны.

Утверждение 1. Оптимальный в среднеквадратическом смысле несмещенный ФИЭ в случае резервирования дискретных каналов наблюдения с кратностью $[i]$ определяется Теоремой 1 из [1], где всюду должен быть поставлен индекс резервирования $[i]$.

Утверждение 2. Для определенного в Утверждении 1 ФИЭ справедливы Теорема 2 из [1] и Теоремы 1–3 из [2].

3. Фиксированный момент включения системы с резервированием

Аналогично [2] введем критерий качества, характеризующий точность оценивания при кратности резервирования $[i]$

$$J_{[i]}(t_m) = \mathrm{tr}\left[A\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m, \tilde{s}_L) \right], \qquad (2)$$

где $A \geq 0$, $\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m, \tilde{s}_L)$ – матрица вторых моментов ошибки оценки ФИЭ, соответствующая кратности резервирования $[i]$.

Замечание 1. Нас может интересовать не только совместная точность ФИЭ, но и раздельные точности фильтра, интерполятора и экстраполятора

$$J^0_{[i]}(t_m) = \mathrm{tr}\left[A_0 \Gamma_{[i]}(t_m)\right],$$
$$J^N_{[i]}(t_m) = \mathrm{tr}\left[A_N \tilde{\Gamma}^{[i]}_N(\tilde{\tau}_N, t_m)\right], \quad (3)$$
$$J^L_{[i]}(t_m) = \mathrm{tr}\left[A_L \tilde{\Gamma}^{[i]}_N(\tilde{s}_L, t_m)\right],$$

соответствующие кратности резервирования $[i]$, что обеспечивается соответствующим конструированием матрицы A из неотрицательно определенных матриц A_0, A_N, A_L соответствующих размеров.

Теорема 1. Пусть

$$C^T_{[i+1]} = \left[C^T_{[i]} \mid O^T\right], \quad (4)$$

где O – матрица размера $(q \times r)$, т.е. $(i+1)$-й резервный канал наблюдения является идеальным без аномальных помех. Если до момента времени t_m работает система без резервирования с заданной матрицей $C_{[i]} = C$, а, начиная с момента t_m, вступает в работу система с резервированием, то

$$J_{[i]}(t_m) \geq J_{[i+1]}(t_m). \quad (5)$$

Доказательство. Поскольку система с резервированием вступает в работу с момента t_m, то

$$\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L) = \tilde{\Gamma}^{[i+1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L) =$$
$$= \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L). \quad (6)$$

Из (П.79) в [1] с учетом (П.47), (2.33), (П.70) в [1] и (8), (9) в [2] следует

$$\tilde{\Gamma}^{[i+1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m, \tilde{s}_L) =$$
$$\tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L) - \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L) \times$$
$$\times G^{[i]^T}_{N+L+1}(t_m) E^T_{[i+1]} [E_{[i+1]} W_{[i+1]}(t_m) E^T_{[i+1]}]^{-1} \times$$
$$\times E_{[i+1]} G^{[i]^T}_{N+L+1}(t_m) \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L), \quad (7)$$

где $E_{[i+1]}$ матрица размера $[((i+1)q-r) \times (i+1)q]$, соответствующая матрице $C_{[i+1]}$ вида (6) и построенная аналогично матрице E в Теореме 1 из [2]. В соответствии с (2.36) из [1]

$$W_{[i+1]}(t_m) = V_{[i+1]}(t_m) + G^{[i+1]}_{N+L+1}(t_m) \times$$
$$\times \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L) G^{[i+1]^T}_{N+L+1}(t_m). \quad (8)$$

Поскольку

$$G^{[i+1]}_{N+L+1}(t_m) = \begin{bmatrix} G^{[i]}_{N+L+1}(t_m) \\ G_{N+L+1}(t_m) \end{bmatrix},$$

$$V_{[i+1]}(t_m) = \begin{bmatrix} V_{[i]}(t_m) & O \\ O & V_{i+1}(t_m) \end{bmatrix},$$

$$E_{[i+1]} = \begin{bmatrix} E_{[i]} & O \\ O & I_q \end{bmatrix}, \quad (9)$$

то из (8) следует

$$W_{[i+1]}(t_m) = \begin{bmatrix} W_{[i]}(t_m) & D^T(t_m) \\ D(t_m) & W_{i+1}(t_m) \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$D(t_m) = G_{N+L+1}(t_m) \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L) \times$$
$$\times G^{[i]^T}_{N+L+1}(t_m), \quad (11)$$

$$W_{i+1}(t_m) = V_{i+1}(t_m) + G_{N+L+1}(t_m) \times$$
$$\times \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L) G^T_{N+L+1}(t_m). \quad (12)$$

Используя (7) также и для кратности резервирования $[i]$, получаем

$$\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m, \tilde{s}_L) - \tilde{\Gamma}^{[i+1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m, \tilde{s}_L) =$$
$$= \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L) B(t_m) \times$$
$$\times \tilde{\Gamma}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N, t_m - 0, \tilde{s}_L), \quad (13)$$

$$B(t_m) = G^{[i+1]^T}_{N+L+1}(t_m) E^T_{[i+1]} [E_{[i+1]} W_{[i+1]}(t_m) E^T_{[i+1]}]^{-1} \times$$
$$\times E_{[i+1]} G^{[i+1]}_{N+L+1}(t_m) - G^{[i]^T}_{N+L+1}(t_m) \times$$
$$\times E^T_{[i]} [E_{[i]} W_{[i]}(t_m) E^T_{[i]}]^{-1} E_{[i]} G^{[i]}_{N+L+1}(t_m). \quad (14)$$

Согласно (9), (10)

$$L^{-1}(t_m) = \left[E_{[i+1]} W_{[i+1]}(t_m) E^T_{[i+1]}\right]^{-1} =$$
$$= \begin{bmatrix} E_{[i]} W_{[i]}(t_m) E^T_{[i]} & E_{[i]} D^T(t_m) \\ D(t_m) E^T_{[i]} & W_{i+1}(t_m) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (15)$$

Использование формулы Фробениуса [4] в (15) с последующей подстановкой в (14) дает

$$B(t_m) = \begin{bmatrix} D(t_m) E^T_{[i]} \Phi^{-1}(t_m) E_{[i]} \times \\ \times G^{[i]}_{N+L+1}(t_m) - G_{N+L+1}(t_m) \end{bmatrix}^T \times$$
$$\times \Psi^{-1}(t_m) \begin{bmatrix} D(t_m) E^T_{[i]} \Phi^{-1}(t_m) E_{[i]} \times \\ \times G^{[i]}_{N+L+1}(t_m) - G_{N+L+1}(t_m) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\Phi(t_m) = E_{[i]} W_{[i]}(t_m) E^T_{[i]},$$
$$\Psi(t_m) = W_{i+1}(t_m) - D(t_m) E^T_{[i]} \Phi^{-1}(t_m) E_{[i]} D^T(t_m). \quad (17)$$

Из (11), (12), (17) с учетом (7), (12) получаем $\Psi(t_m) = V_{i+1}(t_m) + G_{N+L+1}(t_m)\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m,\tilde{s}_L)G^T_{N+L+1}(t_m)$. Так как $V_{i+1}(t_m)>0$, то $\Psi(t_m)>0$ и $\Psi^{-1}(t_m)>0$. Тогда из (16) следует, что $B(t_m)\geqslant 0$, в результате чего, согласно (13), $\Delta\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m,\tilde{s}_L) = \tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m,\tilde{s}_L) - \tilde{\Gamma}^{[i-1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m,\tilde{s}_L)$. Поскольку $A\geqslant 0$, то собственные значения $\lambda_j(\cdot)$, $j=\overline{1;n(N+L+1)}$, матрицы $A\Delta\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m,\tilde{s}_L)$ вещественны и неотрицательны [4]. Поэтому $\mathrm{tr}[A\Delta\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m,\tilde{s}_L)] = \sum\limits_{j=1}^{(N+L+1)n} \lambda_j(A\Delta\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m,\tilde{s}_L))\geqslant 0$. Так как неравенство (5) эквивалентно неравенству $\Delta J_{[i]}(t_m) = J_{[i]}(t_m) - J_{[i+1]}(t_m)\geqslant 0$, то согласно предыдущему неравенству с учетом (2) Теорема 1 доказана.

4. Произвольный момент включения системы с резервированием

Теорема 2. Пусть система с резервированием работает с начального момента времени. Тогда, если

$$\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0,\tilde{s}_L) \geq \tilde{\Gamma}^{[i+1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_m-0,\tilde{s}_L), \quad (18)$$

то свойство (5) справедливо для произвольного момента времени t_m.

Доказательство. Справедливость теоремы будет доказана, если из (5) при справедливости условия (18), записанного для момента времени t_{m+1}, будет следовать неравенство $J_{[i]}(t_{m+1}) \geqslant J_{[i+1]}(t_{m+1})$. Воспользуемся методикой доказательства теоремы 3 из [2]. Матрица $\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L)$ с учетом (18) может быть представлена в виде $\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L) = \tilde{\Gamma}^{[i+1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L)+\tilde{\Gamma}$, где $\tilde{\Gamma}\geqslant 0$. Аналогично выводу формулы (27), получаем

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L) &= \Big[I_{(N+L+1)n} - \\ &-(\tilde{\Gamma}^{[i+1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L)+\tilde{\Gamma})\times \\ &\times G^{[i]^T}_{N+L+1}(t_{m+1})E^T_{[i]}\times \\ &\times\begin{bmatrix}\tilde{W}_{[i]}(t_{m+1})+E_{[i]}G^{[i]}_{N+L+1}(t_{m+1})\times \\ \times\tilde{\Gamma}G^{[i]^T}_{N+L+1}(t_{m+1})E^T_{[i]}\end{bmatrix}^{-1}\times \\ &\times E_{[i]}G^{[i]}_{N+L+1}(t_{m+1})\Big](\tilde{\Gamma}^{[i+1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L)+\tilde{\Gamma}),\end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{[i]}(t_{m+1}) &= E_{[i]}[V_{[i]}(t_{m+1})+G^{[i]}_{N+L+1}(t_{m+1})\times \\ &\times\tilde{\Gamma}^{[i+1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L)G^{[i]^T}_{N+L+1}(t_{m+1})]E^T_{[i]}.\end{aligned} \quad (20)$$

Введем матричную функцию скалярного переменного $\alpha\geqslant 0$ вида $\Phi(\alpha) = \tilde{\Gamma}^{[i+1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L)+\alpha\tilde{\Gamma}$. Рассматривая $\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L)$ как функцию α, из (19) получаем

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L;\alpha) &= \\ =\Big[I_{(N+L+1)n} &- \Phi(\alpha)G^{[i]^T}_{N+L+1}(t_{m+1})\times \\ \times E^T_{[i]}[\tilde{W}_{[i]}(t_{m+1})+\alpha E_{[i]}G^{[i]}_{N+L+1}&\tilde{\Gamma}G^{[i]^T}_{N+L+1}(t_{m+1})E^T_{[i]}]^{-1}\times \\ &\times E_{[i]}G^{[i]}_{N+L+1}(t_{m+1})\Big]\Phi(\alpha).\end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично (22) в [2]

$$d\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L;\alpha)\big/d\alpha = B\tilde{\Gamma}B^T, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}B = I_{(N+L+1)n} &- \Phi(\alpha)G^{[i]^T}_{N+L+1}(t_{m+1})\times \\ \times E^T_{[i]}[\tilde{W}_{[i]}(t_{m+1}) &+ \alpha E_{[i]}G^{[i]}_{N+L+1}(t_{m+1})\times \\ \times\tilde{\Gamma}G^{[i]^T}_{N+L+1}(t_{m+1})E^T_{[i]}&]^{-1}E_{[i]}G^{[i]}_{N+L+1}(t_{m+1})\Big].\end{aligned} \quad (23)$$

Так как $\tilde{\Gamma}\geqslant 0$, то из (22) следует $d\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L,\alpha)/d\alpha\geqslant 0$ [5], следовательно, $\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L,\alpha)$ – монотонно неубывающая по α в смысле определенности матрица. Поэтому

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L;\alpha)\Big|_{\alpha=1} &\geq \\ \geq\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L;\alpha)\Big|_{\alpha=0}&.\end{aligned} \quad (24)$$

Из (21) и (7) с учетом (8), записанной для момента t_{m+1}, следует

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L;\alpha)\Big|_{\alpha=0} &- \\ -\tilde{\Gamma}^{[i+1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L) &= \\ =\tilde{\Gamma}^{[i+1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L)&\tilde{B}(t_{m+1})\times \\ \times\tilde{\Gamma}^{[i+1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1}-0,\tilde{s}_L)&,\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}(t_{m+1}) &= G^{[i+1]^T}_{N+L+1}(t_{m+1})\times \\ \times E^T_{[i+1]}[E_{[i+1]}&W_{[i+1]}(t_{m+1})E^T_{[i+1]}]^{-1}\times \\ \times E_{[i+1]}G^{[i+1]}_{N+L+1}(t_{m+1}) &- G^{[i]^T}_{N+L+1}(t_{m+1})\times \\ \times E^T_{[i]}\tilde{W}^{-1}_{[i]}(t_{m+1})&E_{[i]}G^{[i]^T}_{N+L+1}(t_{m+1}),\end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}W_{[i+1]}(t_{m+1}) &= V_{[i+1]}(t_{m+1})+G^{[i+1]}_{N+L+1}(t_{m+1})\times \\ \times\tilde{\Gamma}^{[i+1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,&t_{m+1}-0,\tilde{s}_L)G^{[i+1]^T}_{N+L+1}(t_{m+1}).\end{aligned} \quad (27)$$

Из сравнения (26) и (14) следует, что доказательство свойства $\tilde{B}(t_{m+1})\geqslant 0$ может быть проведено аналогично доказательству свойства $B(t_m)\geqslant 0$. Тогда из (25) будет следовать

$$\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L;\alpha)|_{\alpha=0}\geqslant\tilde{\Gamma}^{[i+1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L).$$

Согласно (19), (21),

$$\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L) = \tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L;\alpha)|_{\alpha=1}.$$

Из двух последних неравенств с учетом (24) следует

$$\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L)\geqslant\tilde{\Gamma}^{[i+1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L),$$

то есть

$$\Delta\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L)\geqslant\tilde{\Gamma}^{[i]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L)-\tilde{\Gamma}^{[i+1]}_{N+L+1}(\tilde{\tau}_N,t_{m+1},\tilde{s}_L)\geqslant 0.$$

Таким образом, неравенство $\Delta J_{[i]}(t_{m+1}) = J_{[i]}(t_{m+1}) - J_{[i+1]}(t_{m+1})\geqslant 0$ следует аналогично неравенству для $\Delta J_{[i]}(t_m)$ при завершении доказательства Теоремы 2. Тем самым Теорема 2 доказана.

Смысл приведенных результатов состоит в том, что добавление идеального резервного блока без аномальных помех может лишь улучшить качество оценивания.

Замечание 2. В соответствии с Замечанием 1 Теоремы 1 и 2 справедливы для раздельных задач фильтрации, интерполяции и экстраполяции.

Пример. Пусть ненаблюдаемый процесс x_t задан уравнением (1.1) из [1], в котором $F(t) \equiv -a,\ a>0$, $Q(t) \equiv Q = \mathrm{const}$. Процесс z_t, определяет непрерывные наблюдения без памяти вида (1.2) из [1], где $H_k \equiv 0,\ \ k = \overline{1;N},\ H_0 \equiv H = \mathrm{const},\ R(t) \equiv R = \mathrm{const}$. Дискретный канал наблюдения формируется как совокупность двух скалярных каналов, в каждом из которых наблюдается сигнал $X(t_m,\tau) = G_0 x_{t_m} + G_1 x_\tau$, где $G_0 = \mathrm{const}$, $G_1 = \mathrm{const}$, на фоне некоррелированных регулярных помех $\xi_1(t_m)$, $\xi_2(t_m)$ с одной интенсивностью $\Phi_3^2 = \mathrm{const}$. Пусть L=1 (s_1=s).

Рассматриваются три ситуации:

1) аномальные помехи отсутствуют (C=0);
2) аномальная помеха действует по первой компоненте $\eta_1(t_m)$ ($C^T = [1|\,0]$);
3) аномальные помехи действуют по обеим компонентам $\eta_1(t_m)$ и $\eta_2(t_m)$ двумерного вектора наблюдения $\eta(t_m)$ ($C = I_2$). Соответствующие этим случаям среднеквадратические ошибки оценок экстраполяции в момент t_m будем обозначать $\gamma_{22}^0(s,t_m)$, $\gamma_{22}^1(s,t_m)$, $\gamma_{22}^2(s,t_m)$.

Рассмотрим, как и в примере из [1], случай редких дискретных наблюдений, когда решения дифференциальных уравнений (2.4–2.10) из [1] для рассматриваемого примера достигают своих стационарных значений (см. (3.2) в [6])

$$\gamma = (\lambda - a)\big/\delta,\ \lambda = \sqrt{a^2 + \delta Q},$$
$$\delta = H_0^2\big/R,\ \gamma_{01}(t^*) = \gamma\exp\{-\lambda t^*\},$$
$$\gamma_{11}(t^*) = \gamma[\kappa + (1-\kappa)\exp\{-2\lambda t^*\}],$$
$$\kappa = (\lambda + a)/2\lambda,\ \gamma_{02}(T) = \gamma\exp\{-aT\},$$
$$\gamma_{12}(t^*,T) = \gamma\exp\{-\lambda t^*\}\exp\{-aT\},$$
$$\gamma_{22}(T) = Q/2a + (\gamma - Q/2a)\exp\{-aT\}, \quad (28)$$

где $t^* = t-\tau$ есть глубина памяти, а $T = s-t$ есть интервал экстраполяции. Пусть $\Delta_{10} = \gamma_{22}^1(s,t_m) - \gamma_{22}^0(s,t_m)$, $\Delta_{21} = \gamma_{22}^2(s,t_m) - \gamma_{22}^1(s,t_m)$. Тогда аналогично (2.49) из [1] получим

$$\Delta_{10} = \frac{\Phi_3^2[G_0\gamma_{02} + G_1\gamma_{12}]^2}{[\Phi_3^2 + (G_0^2\gamma + G_1^2\gamma_{11} + 2G_0G_1\gamma_{01})]}\times \quad (29)$$
$$\times 1/[\Phi_3^2 + 2(G_0^2\gamma + G_1^2\gamma_{11} + 2G_0G_1\gamma_{01})],$$

$$\Delta_{21} = \frac{[G_0\gamma_{02} + G_1\gamma_{12}]^2}{[\Phi_3^2 + (G_0^2\gamma + G_1^2\gamma_{11} + 2G_0G_1\gamma_{01})]}, \quad (30)$$

где γ, γ_{01}, γ_{11}, γ_{02}, γ_{12} определяются формулами (28). Из (28–30) следует $\Delta_{10} > 0$, $\Delta_{21} > 0$, то есть

$$\gamma_{22}^2(s,t_m) > \gamma_{22}^1(s,t_m) > \gamma_{22}^0(s,t_m). \quad (31)$$

Канал наблюдения, формирующий $\eta_2(t_m)$ в ситуации 2, может быть интерпретирован как резервный относительно $\eta_1(t_m)$ и являющийся при этом идеальным. Поскольку ситуация 3 эквивалентна ситуации скалярного наблюдения $\eta_1(t_m)$, то согласно принятым обозначениям для оценки экстраполяции $J_{[1]}(t_m)=\gamma_{22}^2(s,t_m)$, $J_{[2]}(t_m)=\gamma_{22}^1(s,t_m)$, $\Delta_{21}=J_{[1]}(t_m)-J_{[2]}(t_m)$. Так как $\Delta_{21} > 0$, то $J_{[1]}(t_m)>J_{[2]}(t_m)$, что отражает свойство (5) для рассматриваемого примера относительно оценки экстраполяции (см. Замечание 2), причем при конечных значениях параметров получено строгое неравенство, означающее, что наличие идеального резервного канала лишь улучшает качество экстраполяции. Воспользовавшись последней интерпретацией Δ_{21}, введем меру эффективности $\varepsilon_{21} = \Delta_{21} - \tilde{\Delta}_{21}$ дискретных наблюдений с памятью относительно наблюдений без памяти в задаче экстраполяции, где $\tilde{\Delta}_{21}$ – значение Δ_{21} при $G_1 = 0$. Если $\varepsilon_{21} > 0$, то наблюдения с памятью эффективнее наблюдений без памяти, так как наличие идеального резервного канала с памятью дает большее уменьшение среднеквадратической ошибки оценки экстраполяции, нежели наличие идеального резервного канала без памяти. Если $\varepsilon_{21} < 0$, то наблюдения без памяти эффективнее наблюдений с памятью. Исследование зависимости $\varepsilon_{21}(t^*)$, как функции глубины памяти, дает следующий результат.

Утверждение 3. Пусть $\varepsilon_{21}^0 = \lim\ \varepsilon_{21}$ при $t^*\downarrow 0$; $\varepsilon_{21}^\infty = \lim\ \varepsilon_{21}$ при $t^*\uparrow\infty$; $\boldsymbol{G} = \{(G_0,G_1){:}\,G_1^2 + 2G_0G_1 \leqslant 0\}$. Тогда

1) для ε_{21}^0 и ε_{21}^∞ справедливы формулы

$$\varepsilon_{21}^0 = [\Phi_3^2\gamma^2(G_1^2 + 2G_0G_1)\exp\{-2aT\}]\big/$$
$$[(\Phi_3^2 + (G_0 + G_1)^2\gamma)(\Phi_3^2 + G_0^2\gamma)], \quad (32)$$

$$\varepsilon_{21}^\infty = -[G_0^2G_1^2\kappa\gamma^3\exp\{-2aT\}]\big/$$
$$[(\Phi_3^2 + (G_0^2 + G_1^2\kappa)\gamma)(\Phi_3^2 + G_0^2\gamma)]; \quad (33)$$

2) при большой глубине памяти идеальный резервный канал без памяти эффективнее идеального резервного канала с памятью, то есть $\varepsilon_{21}^\infty<0$;
3) если $(G_0,G_1)\notin\boldsymbol{G}$, то при малой глубине памяти идеальный резервный канал с памятью эффективнее идеального резервного канала без памяти, то есть $\varepsilon_{21}^\infty>0$ и $\varepsilon_{21}^\infty\leqslant 0$ при $(G_0,G_1)\in\boldsymbol{G}$;
4) если $(G_0,G_1)\notin\boldsymbol{G}$, то $\varepsilon_{21}(t^*)$ является монотонно убывающей функцией глубины памяти, обращаясь в ноль в точке $t^* = t_{eff}^*$, определяемой формулой

$$t_{eff}^* = \frac{1}{\lambda}\ln\left\{\frac{G_1(\Phi_3^2 + \kappa\gamma G_0^2)}{G_0([\Phi_3^4 + \kappa\gamma G_1^2(\Phi_3^2 + \kappa\gamma G_0^2)]^{1/2} - \Phi_3^2)}\right\}. (34)$$

Дадим некоторые комментарии к полученному результату.

1^0) Величина t^*_{eff} может быть определена как эффективная глубина памяти.

2^0) Влияние непрерывных наблюдений осуществляется через параметр δ, см. (28), пропорционального отношению сигнал/шум по интенсивности в непрерывном канале. При отсутствии непрерывных наблюдений, когда $\delta = 0$, из (28) следует, что $\lambda = a$, $\kappa = 1$, и, таким образом, формула (34) дает явную зависимость эффективной глубины памяти от времени корреляции $\alpha_k = 1/a$ процесса x_t.

Заключение

Для ФИЭ, синтез которого осуществлен в [1], доказаны следующие основные свойства:

– добавление в канале наблюдения идеального резервного блока без аномальных помех может лишь улучшить качество оценивания;
– свойства ФИЭ, отмеченные выше, справедливы и для раздельных задач фильтрации, интерполяции и экстраполяции,
– рассмотренный пример показывает, что наличие памяти может как улучшать, так и ухудшать качество оценивания.

Применительно к системам управления, навигации, передачи данных, имеющих непрерывно-дискретные во времени инерционные каналы наблюдения, полученные результаты позволяют обоснованно выбирать кратности резервирования каналов наблюдения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демин Н.С., Рожкова С.В. Непрерывно-дискретное оценивание стохастических процессов в случае наблюдений с памятью при наличии аномальных помех. Синтез // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2000. – № 3. – С. 5–16.
2. Демин Н.С., Рожкова С.В., Рожкова О.В. Анализ задачи непрерывно-дискретного оценивания стохастических процессов в случае наблюдений с памятью при наличии аномальных помех // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т 306. – № 2. – С. 5–10 .
3. Браславский Д.А., Петров В.В. Точность измерительных устройств. – М.: Машиностроение, 1976. – 312 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 576 с.
5. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. – М.: Наука, 1972. –232 с.
6. Демин Н.С., Сушко Т.В., Яковлева А.В. Обобщенная обратная экстраполяция стохастических процессов по совокупности непрерывных и дискретных наблюдений с памятью // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1997. – № 4. – С. 48–59.

УДК 159.9:681.3